第 7 講　ド・モアブルの定理

PART1 ド・モアブルの定理

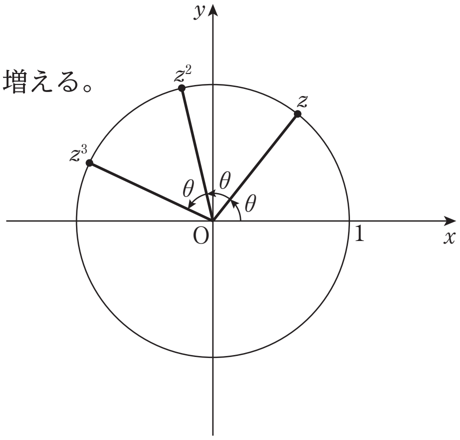
要点整理と公式

要点 ① ド・モアブルの定理

0 でない複素数に，絶対値が 1 の複素数

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

をかけると，絶対値は変わらず，偏角が θ だけ増える。



このことを利用し，z の累乗を考える。

$$z^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)$$
$$=\cos\quad\quad+i\sin$$

$$z^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2\times(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos\quad\quad+i\sin\quad\quad)\times(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\cos\quad\quad+i\sin$$

これを繰り返すと，正の整数 n について，以下が成り立つことがわかる。

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos\quad\quad+i\sin\quad\quad\quad\cdots\cdots①$$

また，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ に対して

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\quad+i\sin}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)$$
$$=\cos(\quad\quad)+i\sin(\quad\quad)$$

が成り立つから，正の整数 n について $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ と定めると，①より

$$z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos\quad\quad+i\sin\quad\quad}$$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

したがって，①は n が負の整数のときも成り立つ。

さらに，$z^0=1$ と定めると，次の「ド・モアブルの定理」が成り立つ。

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

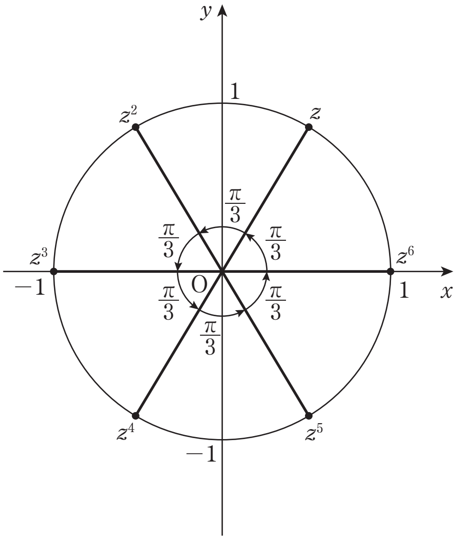
(ex) $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z^6 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$

$$= \cos\left(\qquad\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\qquad\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

$$= 1$$



1 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$　　(2) $(\sqrt{3}-i)^6$

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^{-4}$　　(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^9$

Point Pickup

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

複素数の n 乗の計算は，複素数を極形式で表し，ド・モアブルの定理を利用することで偏角の n 倍の計算に持ち込むことができる。

第 7 講 PART1 確認問題

次の式を計算せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=$ ア

① 0　② 1

③ -1　④ i

2 $(1-i)^5=$ イ

① $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$　② $4+4i$

③ $-4+4i$　④ $-4-4i$

3 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^{-4}=$ ウ

① $-4-4\sqrt{3}i$　② $-8+8\sqrt{3}i$

③ $-8-8\sqrt{3}i$　④ $-8\sqrt{3}-8i$

4 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}=$ エ

① -32　② $32i$

③ 64　④ -64

第 7 講 ド・モアブルの定理

PART1 ド・モアブルの定理

1 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$　(2) $(\sqrt{3}-i)^6$

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^{-4}$　(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^9$

[解答]

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(2) $\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ より

$$(\sqrt{3}-i)^6=2^6\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6=2^6\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}=2^6\cdot(-1)=-64$$

(3) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-4}$$

$$=2^4\left\{\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right\}=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-8+8\sqrt{3}\,i$$

(4) $$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right\}$$

より

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^9=(\sqrt{2})^9\left\{\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right\}^9$$

$$=(\sqrt{2})^9\left\{\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=16+16i$$

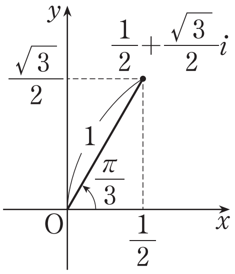
第 7 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$



より，[A]

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$

$$=\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{[B]}$$

$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

$$=\mathbf{1}$$

[A]　(　)の中の式を極形式で表す。

[B]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
$=\cos n\theta+i\sin n\theta$

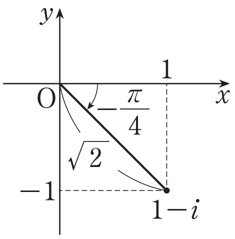
2

[正解] イ：③

[解説]

$$1-i$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$



より，[C]

$$(1-i)^5$$

$$=(\sqrt{2})^5\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^5$$

$$=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\right\} \quad \text{[D]}$$

$$=4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\mathbf{-4+4i}$$

[C]　(　)の中の式を極形式で表す。

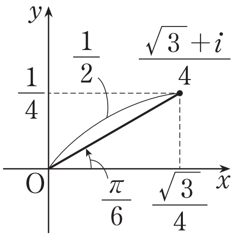
[D]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$
$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

3 [正解] ウ：③

[解説]

$$\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-4}$$

$$=2^4\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

[E]

$$=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

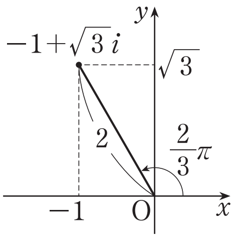
$$=\mathbf{-8-8\sqrt{3}\,i}$$

[E]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$
$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

4　[正解] エ：④

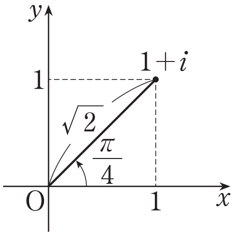
[解説]

$$-1+\sqrt{3}\,i$$
$$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$1+i$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$



より，[F]

$$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}$$
$$=\frac{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$



$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$ [G]

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

よって，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{12}$$
$$=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)^{12}$$ [H]
$$=64(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)$$
$$=64\cdot(-1)$$
$$=\mathbf{-64}$$

> [F]　(　) の中の分母・分子をそれぞれ極形式で表す。

> [G]　複素数の商の極形式
> $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
> $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると，
> $$\frac{z_1}{z_2}$$
> $$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

> [H]　ド・モアブルの定理
> n が整数のとき，
> $$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$$
> $$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$